Matris çarpımının toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılımı vardır.

$$A(B \pm C) = AB \pm AC$$

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

Özellikler kullanılarak,

$(A-B)$ ile $(C-D)$ çarpımını;

$$(A-B)(C-D) = (A-B)C - (A-B)D$$

$$= AC - BC - AD + BD$$

şeklinde yazabiliriz.

Vektörlerin çarpımlarında da matrisler için geçerli olan kurallar aynıdır. A, $n \times p$; b, $p \times 1$ ve d, $n \times 1$ boyutlu olduğunu düşünelim. Dolayısıyla Ab, $n \times 1$ boyutlu bir sütun vektörü, $d'A$ ise $1 \times p$ boyutlu bir satır vektörü, $b'c$ 1×1 boyutlu çarpımlar toplamı, bc' $p \times p$ boyutlu bir matris ve cd' $p \times n$ boyutlu bir matris olacaktır.

$$b'b = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_p^2$$

$$bb' = \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & \cdots & b_1b_p \\ b_2b_1 & b_2^2 & \cdots & b_2b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_pb_1 & b_pb_2 & \cdots & b_p^2 \end{pmatrix}_{p \times p}$$

Yani, $b'b$ kareler toplamı ve bb' simetrik bir kare matristir.

$p \times 1$ boyutlu b vektörünün elemanlarının karelerinin toplamının karekökü, b noktasının orijine olan uzaklığını verir.

$$b\text{'nin boyu} = \sqrt{b'b} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} b_i^2}$$

Teorem

Eğer A, $n \times p$ ve B, $p \times m$ boyutlu ise aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$(AB)' = B'A'$$

İspat

$C = AB$ olsun.

$$C = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$C = AB$'nin transpozunu alırsak;

$$(AB)' = C' = (c_{ij})' = (c_{ji}) = B'.A'$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} \cdot a_{jk}\right) = B'A'$$

şeklinde bulunur.

$A_{2\times3}$, $B_{3\times2}$ çarpılabilir matrisler olsun. $(A.B)' = B'.A'$

$$\Rightarrow A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)' = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} \\ a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}.a_{11} + b_{21}.a_{12} + b_{31}.a_{13} & b_{11}.a_{21} + b_{21}.a_{22} + b_{31}.a_{23} \\ b_{12}.a_{11} + b_{22}.a_{12} + b_{32}.a_{13} & b_{12}.a_{21} + b_{22}.a_{22} + b_{32}.a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = B'.A'$$ elde edilir.

Sonuç: Eğer A, B ve C matrisleri ~~tanımlı ise~~ ~~yani~~ çarpılabilir ise yani A.B.C tanımlı ise $(ABC)' = C'.B'.A'$ olur.

$A_{n\times m}$ ve $B_{m\times p}$ matrisleri incelensin. a_i', A'nın i.nci satırı ve b_j, B'nin j.nci sütunu olsun. Yani;

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} , \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$$

ise $A.B$'nin $(i\text{-}j)$.nci elemanı $a_i' \cdot b_j$ dir.

$$AB = \begin{pmatrix} a_1' b_1 & a_1' b_2 & \dots & a_1' b_p \\ a_2' b_1 & a_2' b_2 & \dots & a_2' b_p \\ \vdots & & & \\ a_n' b_1 & a_n' b_2 & \dots & a_n' b_p \end{pmatrix}$$

Bu çarpım A'nın satırları cinsinden şöyle yazılır:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_1' (b_1, b_2, \dots, b_p) \\ a_2' (b_1, b_2, \dots, b_p) \\ \vdots \\ a_n' (b_1, b_2, \dots, b_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' B \\ a_2' B \\ \vdots \\ a_n' B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} . B$$

$A.B$'nin ilk sütunu A cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{pmatrix} a_1' b_1 \\ a_2' b_1 \\ \vdots \\ a_n' b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} . b_1 = A . b_1 .$$

Benzer olarak $A.b_2$ ve diğerleri de yazılabilir. Yani AB, B'nin sütunları cinsinden yazılabilir:

$$A.B = A.(b_1, b_2, \dots, b_p) = (A b_1, \dots, A b_p)$$

Herhangi bir A matrisi kendi transpozu ile $A'A$ veya AA' şeklinde çarpıla-bilir. Bu çarpımın bazı özellikleri şöyledir:

1°. $A'A$ $\frac{A_{n \times p} \text{ ise}}{, \; p \times p}$ boyutlu ve elemanları A'nın sütunlarının çarpımıdır.

2°. AA', $n \times n$ boyutlu ve elemanları A'nın satırlarının çarpımıdır.

3°. $A'A$ ve AA' matrislerinin her ikisi de simetriktir. $(A'A)' = A'.A$

4°. $A'A = 0 \Rightarrow A = 0$ dır.

$A_{n \times n}$ ve $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ olsun. $D.A$ çarpımında A'nın i.nci satırı d_i ile çarpılır ve $A.D$ çarpımında A'nın $j$inci sütunu d_j ile çarpılır. Örneğin; $n=3$ için

$$D.A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$A.D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & d_3 a_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 a_{32} & d_3 a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D.A.D = \begin{pmatrix} d_1^2 a_{11} & d_1 d_2 a_{12} & d_1 d_3 a_{13} \\ d_2 d_1 a_{21} & d_2^2 . a_{22} & d_2 d_3 a_{23} \\ d_3 d_1 a_{31} & d_3 d_2 . a_{32} & d_3^2 . a_{33} \end{pmatrix}$$ elde edilir.

Not: $D.A \neq A.D$ dır.

Ancak diagonal matrisin birim diagonal olması durumunda

$$I.A = A.I = A$$

olur.

Tanım: A simetrik $(A' = A)$ bir matris ve y bir vektör ~~ise~~. ise

$$y'.A.y = \sum_i a_{ij}.y_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}.y_i.y_j$$

çarpımı karesel **form** olarak adlanır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = A \text{ simetrik}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \quad y' = [y_1 \quad y_2]$$

$$y'.A.y = [y_1 \quad y_2]_{1\times 2} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 a_{11} + y_2 a_{21} \quad y_1 a_{12} + y_2 a_{22}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= y_1^2 a_{11} + \underline{y_1.y_2.a_{21} + y_1 y_2 a_{12}} + y_2^2.a_{22}$$

$$= \sum_i a_{ij}.y_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}\, y_i.y_j$$